模块二 基本不等式

第 1 节 基本不等式的常见用法与拼凑技巧（★★☆）

内容提要

设 $a>0$，$b>0$，则 $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$，当且仅当 $a=b$ 时取等号. 我们把这一不等式叫做基本（均值）不等式，常用它来求一些代数式的最大、最小值，其运用口诀可简记为“一正、二定、三相等”.

1．一正：a，b 均为正数；

2．二定：用基本不等式求最值时应满足和为定值或积为定值. 但需注意，若和或积不为定值，基本不等式仍然是成立的，只是求不出最值；

3．三相等：必须验证等号能取到，上述定值才是最值.

运用基本不等式求最值的难点在于“凑定值”，本节将归纳几类常见的凑“和定”、“积定”的方法.

典型例题

类型Ⅰ：和定求积的最大值的基本方法

【例 1】已知 $a>0$，$b>0$，且 $2a+b=1$，则 ab 的最大值为_____.

解析： a，b 均为正数，且已知 $2a$ 与 b 的和为定值，故可直接用均值不等式求积的最大值，

由题意，$1=2a+b\ge2\sqrt{2a\cdot b}$，所以 $ab\le\frac{1}{8}$，当且仅当 $2a=b$ 时取等号，

结合 $2a+b=1$ 可得此时 $a=\frac{1}{4}$，$b=\frac{1}{2}$，所以 ab 的最大值为 $\frac{1}{8}$.

答案： $\frac{1}{8}$

【变式】已知 $a>0$，$b>0$，且 $4a+b=1$，则 $\log_{\frac{1}{2}}a+\log_{\frac{1}{2}}b$ 的最小值为_____.

解析： 由对数运算性质，$\log_{\frac{1}{2}}a+\log_{\frac{1}{2}}b=\log_{\frac{1}{2}}(ab)$ ①，

注意到 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 为减函数，故只需求 ab 的最大值，条件中有和为定值，可用均值不等式求积的最大值，

由题意，$1=4a+b\ge2\sqrt{4a\cdot b}=4\sqrt{ab}$，所以 $ab\le\frac{1}{16}$，当且仅当 $4a=b$ 时取等号，

结合 $4a+b=1$ 可得此时 $a=\frac{1}{8}$，$b=\frac{1}{2}$，所以 $(ab)_{\max}=\frac{1}{16}$，结合①知 $(\log_{\frac{1}{2}}a+\log_{\frac{1}{2}}b)_{\min}=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{16}=4$.

答案： 4

【例 2】（1）若 $-6<m<3$，则 $(3-m)(m+6)$ 的最大值是_____；

（2）若 $-3<m<3$，则 $(3-m)(2m+6)$ 的最大值是_____.

解析：（1）$3-m$ 与 $m+6$ 的和为定值，发现这一隐藏特征，就可用不等式 $ab\le(\frac{a+b}{2})^2$ 来求积的最大值，

$(3-m)(m+6)\le[\frac{(3-m)+(m+6)}{2}]^2=\frac{81}{4}$，当且仅当$3-m=m+6$，即$m=-\frac{3}{2}$时取等号，

所以$(3-m)(m+6)$的最大值是$\frac{81}{4}$.

（2）$3-m$与$2m+6$的和不再是定值了，但可将后者提公因式2到括号外，凑成和为定值，

$(3-m)(2m+6)=2(3-m)(m+3)\le 2[\frac{(3-m)+(m+3)}{2}]^2=18$，当且仅当$3-m=m+3$，即$m=0$时取等号，

所以$(3-m)(2m+6)$的最大值是18.

答案：（1）$\frac{81}{4}$；（2）18

【总结】若条件有和为定值（有时是隐藏的），则可考虑用不等式$ab\le(\frac{a+b}{2})^2$来求积的最大值；若没有和为定值，则可尝试凑成和为定值，再用上述不等式求积的最大值，在其中一项上乘个系数使它们的和为定值是常用的凑“和定”的方法.

【例3】（多选）已知$10^a=2$，$10^b=5$，则下列选项中正确的有（　　）

（A）$ab>\frac{1}{4}$　（B）$ab<\frac{1}{4}$　（C）$a^2+b^2<\frac{1}{2}$　（D）$a^2+b^2>\frac{1}{2}$

解析：要判断的不等式与a，b有关，故应分析它们的关系，可由已知条件解出a和b来看，

$10^a=2\Rightarrow a=\lg 2$，$10^b=5\Rightarrow b=\lg 5$，所以$a+b=\lg 2+\lg 5=\lg(2\times 5)=1$，

有了和为定值，要判断A、B两个选项，直接用基本不等式即可，

因为$a>0$，$b>0$，且$a\ne b$，所以$1=a+b>2\sqrt{ab}$，从而$ab<\frac{1}{4}$，故A项错误，B项正确；

选项C、D都与a^2+b^2有关，前面已经得到了$a+b=1$，所以配方来看，

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=1-2ab$，由$ab<\frac{1}{4}$可得$1-2ab>1-2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$，

所以$a^2+b^2>\frac{1}{2}$，故C项错误，D项正确.

答案：BD

【反思】a^2+b^2，$a+b$，ab三者之间可以通过配方结合基本不等式来相互转换.

类型Ⅱ：积定求和的最小值的基本方法

【例4】（1）已知$a>0$，则$a+\frac{1}{a}$的最小值是_____；

（2）已知$a>1$，则$a+\frac{1}{a-1}$的最小值是_____；

（3）已知$a>1$，则$2a+\frac{1}{a-1}$的最小值是_____；

（4）已知$a>1$，则$2a+\frac{4a}{a-1}$的最小值是_____.

解析：（1）两项之积本身就是定值，直接用均值不等式求和的最小值即可，

由题意，$a+\frac{1}{a}\ge 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}=2$，当且仅当$a=\frac{1}{a}$，即$a=1$时取等号，所以$a+\frac{1}{a}$的最小值是 2.

（2）积不是定值，要求和的最小值，应想办法凑“积定”，分母是$a-1$，故在前面的a上也减 1，

因为$a>1$，所以$a-1>0$，故$a+\frac{1}{a-1}=(a-1)+\frac{1}{a-1}+1\ge 2\sqrt{(a-1)\cdot\frac{1}{a-1}}+1=3$，

当且仅当$a-1=\frac{1}{a-1}$时取等号，结合$a>1$可得此时$a=2$，所以$a+\frac{1}{a-1}$的最小值为 3.

（3）要求和的最小值，应先凑“积定”，分母是$a-1$，故把外面的a也变成$a-1$，

因为$a>1$，所以$a-1>0$，故$2a+\frac{1}{a-1}=2(a-1)+\frac{1}{a-1}+2\ge 2\sqrt{2(a-1)\cdot\frac{1}{a-1}}+2=2\sqrt{2}+2$，

取等条件是$2(a-1)=\frac{1}{a-1}$，结合$a>1$可得$a=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以$2a+\frac{1}{a-1}$的最小值是$2\sqrt{2}+2$.

（4）分子不再是常数，可通过拆部分分式，将其化为常数，按前面两道题的方法处理，

由题意，$2a+\frac{4a}{a-1}=2a+\frac{4(a-1)+4}{a-1}=2a+4+\frac{4}{a-1}=2(a-1)+\frac{4}{a-1}+6\ge 2\sqrt{2(a-1)\cdot\frac{4}{a-1}}+6=4\sqrt{2}+6$，

取等条件是$2(a-1)=\frac{4}{a-1}$，结合$a>1$可得此时$a=\sqrt{2}+1$，所以$2a+\frac{4a}{a-1}$的最小值是$4\sqrt{2}+6$.

答案：（1）2；（2）3；（3）$2\sqrt{2}+2$；（4）$4\sqrt{2}+6$

【反思】在求两项之和的最小值时，若这两项之积不是定值，则可以考虑通过变形凑成积为定值，用不等式$a+b\ge 2\sqrt{ab}$来求和的最小值.

【变式 1】已知$2a-b=2$，则$9^a+\frac{1}{3^b}$的最小值是_____.

解析：要求和的最小值，应寻找积为定值，先看看有无现成的“积定”，$9^a\cdot\frac{1}{3^b}=3^{2a}\cdot 3^{-b}=3^{2a-b}=3^2$，有“积定”，故直接用均值不等式求和的最小值即可，

因为$2a-b=2$，所以$9^a+\frac{1}{3^b}\ge 2\sqrt{9^a\cdot\frac{1}{3^b}}=2\sqrt{3^{2a-b}}=2\sqrt{3^2}=6$，当且仅当$9^a=\frac{1}{3^b}$时等号成立，

即$3^{2a}=3^{-b}$，也即$2a=-b$，结合$2a-b=2$可得此时$a=\frac{1}{2}$，$b=-1$，所以$9^a+\frac{1}{3^b}$的最小值是 6.

答案：6

【变式 2】已知$4x^4+9x^2y^2+2y^4=4$，则$5x^2+3y^2$的最小值为_____.

解析：所给等式左侧可分解因式，先分解，由题意，$4x^4+9x^2y^2+2y^4=(4x^2+y^2)(x^2+2y^2)=4$，

注意到$(4x^2+y^2)+(x^2+2y^2)$恰为求最值的目标，且两项之积为定值，故可用$a+b\ge 2\sqrt{ab}$求最小值，

$5x^2+3y^2=(4x^2+y^2)+(x^2+2y^2)\ge 2\sqrt{(4x^2+y^2)(x^2+2y^2)}=4$，取等条件是$4x^2+y^2=x^2+2y^2$，

结合$4x^4+9x^2y^2+2y^4=4$可得此时$x^2=\dfrac{2}{7}$，$y^2=\dfrac{6}{7}$，满足题意，所以$5x^2+3y^2$的最小值为4.

答案：4

【反思】有的题目积定隐藏在条件中，需要变形才能发现，上面的变式1和变式2就是如此.

【例5】已知a，b都是正数，则$\dfrac{5a}{2a+3b}+\dfrac{5b}{3a+2b}$的最小值是_____.

解析：分母结构较复杂，不易看出如何变形求最值，先将分母换元再看，

设$\begin{cases}x=2a+3b\\y=3a+2b\end{cases}$，因为$a$，$b$都是正数，所以$x$，$y$也都是正数，且$a=\dfrac{3y-2x}{5}$，$b=\dfrac{3x-2y}{5}$，

所以$\dfrac{5a}{2a+3b}+\dfrac{5b}{3a+2b}=\dfrac{3y-2x}{x}+\dfrac{3x-2y}{y}=\dfrac{3y}{x}-2+\dfrac{3x}{y}-2=\dfrac{3y}{x}+\dfrac{3x}{y}-4\ge 2\sqrt{\dfrac{3y}{x}\cdot\dfrac{3x}{y}}-4=2$，

当且仅当$\dfrac{3y}{x}=\dfrac{3x}{y}$时取等号，此时$y=x$，也即$a=b$，故$\dfrac{5a}{2a+3b}+\dfrac{5b}{3a+2b}$的最小值是2.

答案：2

【反思】涉及最值问题，当分母较复杂时，可尝试换元法，换元后往往更易观察出形式，换元法在基本不等式中非常的重要.

【变式】$\dfrac{x^2+17}{4\sqrt{x^2+1}}$的最小值是_____.

解析：分母的根号部分较复杂，尝试将分母换元再看能否凑出积为定值，

令$t=\sqrt{x^2+1}\ge 1$，则$x^2=t^2-1$，所以$\dfrac{x^2+17}{4\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{(t^2-1)+17}{4t}=\dfrac{t^2+16}{4t}=\dfrac{1}{4}(t+\dfrac{16}{t})\ge\dfrac{1}{4}\times 2\sqrt{t\cdot\dfrac{16}{t}}=2$，

当且仅当$t=\dfrac{16}{t}$，即$t=4$时等号成立，结合$t=\sqrt{x^2+1}$可得此时$x=\pm\sqrt{15}$，故$\dfrac{x^2+17}{4\sqrt{x^2+1}}$的最小值是2.

答案：2

【总结】从上面几道题可以看出，用均值不等式求为正数的两项之和的最小值，找到或凑出积为定值是关键，常见的配凑方法有添项、拆项、换元等.

类型III：“1”的代换

【例6】已知$a+6b=2(a>0,b>0)$，则$\dfrac{4}{a}+\dfrac{6}{b}$的最小值为_____.

解析：要求和的最小值，考虑凑积为定值，把$\dfrac{4}{a}+\dfrac{6}{b}$看成$(\dfrac{4}{a}+\dfrac{6}{b})\cdot 1$，其中$1=2\times\dfrac{1}{2}$，结合已知的等式，2又可代换成$a+6b$，这样展开就有积定了，

因为$a+6b=2(a>0,b>0)$，所以$\dfrac{4}{a}+\dfrac{6}{b}=(\dfrac{4}{a}+\dfrac{6}{b})\cdot 1=(\dfrac{4}{a}+\dfrac{6}{b})\cdot 2\times\dfrac{1}{2}=(\dfrac{4}{a}+\dfrac{6}{b})(a+6b)\times\dfrac{1}{2}$

$=(\frac{2}{a}+\frac{3}{b})(a+6b)=2+\frac{12b}{a}+\frac{3a}{b}+18=\frac{12b}{a}+\frac{3a}{b}+20\ge 2\sqrt{\frac{12b}{a}\cdot\frac{3a}{b}}+20=32$，

取等条件是$\frac{12b}{a}=\frac{3a}{b}$，结合$a+6b=2(a>0,b>0)$可得$a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{4}$，故$\frac{4}{a}+\frac{6}{b}$的最小值为 32.

答案：32

【反思】“已知$()a+()b=()$，让求$\frac{()}{a}+\frac{()}{b}$的最小值（括号内可为任意正常数）”这类题，都可像本题这样通过“1”的代换，凑成积为定值. 这是一个基本模型，很多更复杂的题，可通过换元转化成这种模型.

【变式 1】已知x，y为正实数，且$x+2y=xy$，则$x+2y$的最小值是_____.

解析：只要在$x+2y=xy$的两端同除以xy，就和上一题类似了，因为$x+2y=xy$，所以$\frac{1}{y}+\frac{2}{x}=1$，

要求和的最小值，可用“1”的代换凑积为定值，

$x+2y=(x+2y)\cdot 1=(x+2y)(\frac{1}{y}+\frac{2}{x})=\frac{x}{y}+2+2+\frac{4y}{x}=\frac{x}{y}+\frac{4y}{x}+4\ge 2\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{4y}{x}}+4=8$，

当且仅当$\frac{x}{y}=\frac{4y}{x}$时取等号，结合$\frac{1}{y}+\frac{2}{x}=1$可得此时$x=4$，$y=2$，所以$x+2y$的最小值是 8.

答案：8

【变式 2】已知x，y为正实数，且$x+y=1$，则$\frac{1}{2x+y}+\frac{4}{y+2}$的最小值为_____.

解析：$\frac{1}{2x+y}+\frac{4}{y+2}$与上面例 6 中的$\frac{4}{a}+\frac{6}{b}$结构挺像，故尝试通过换元化为例 6 的模型来处理，

令$\begin{cases}2x+y=a\\y+2=b\end{cases}$，则由题意，$a+b=2(x+y)+2=4$，

于是问题即为在$a+b=4$的条件下，求$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}$的最小值，这是与例 6 相同的模型，用“1”的代换即可，

所以$\frac{1}{2x+y}+\frac{4}{y+2}=\frac{1}{a}+\frac{4}{b}=(\frac{1}{a}+\frac{4}{b})\cdot 1=(\frac{1}{a}+\frac{4}{b})\cdot 4\times\frac{1}{4}=(\frac{1}{a}+\frac{4}{b})(a+b)\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}(1+\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}+4)=\frac{1}{4}(\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}+5)$

$\ge\frac{1}{4}(2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{4a}{b}}+5)=\frac{9}{4}$，当且仅当$\frac{b}{a}=\frac{4a}{b}$时取等号，此时$b=2a$，结合$a+b=4$可得$\begin{cases}a=\frac{4}{3}\\b=\frac{8}{3}\end{cases}$，

代入$\begin{cases}2x+y=a\\y+2=b\end{cases}$可得$\begin{cases}x=\frac{1}{3}\\y=\frac{2}{3}\end{cases}$，满足题意，所以$\frac{1}{2x+y}+\frac{4}{y+2}$的最小值为$\frac{9}{4}$.

答案：$\frac{9}{4}$

【反思】遇到分母较复杂、分子为常数的两个分式相加，让求其最小值这类题，可考虑将分母整体换元，看能否转化为例 6 的模型来处理.

【例 7】若 $0<a<1$，则 $\dfrac{2}{a^2}+\dfrac{1}{1-a^2}$ 的最小值为_____.

解析：观察发现分母之和为 1，故换元后仍可化为例 6 的模型来处理，

设 $\begin{cases}x=a^2\\y=1-a^2\end{cases}$，因为 $0<a<1$，所以 $0<x<1$，$0<y<1$，且 $x+y=1$，

故 $\dfrac{2}{a^2}+\dfrac{1}{1-a^2}=\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=(\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y})\cdot 1=(\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y})(x+y)=2+\dfrac{2y}{x}+\dfrac{x}{y}+1=\dfrac{2y}{x}+\dfrac{x}{y}+3\ge 2\sqrt{\dfrac{2y}{x}\cdot\dfrac{x}{y}}+3=2\sqrt{2}+3$，

取等条件是 $\dfrac{2y}{x}=\dfrac{x}{y}$，即 $x=\sqrt{2}y$，结合 $x+y=1$ 可得 $\begin{cases}x=2-\sqrt{2}\\y=\sqrt{2}-1\end{cases}$，故 $(\dfrac{2}{a^2}+\dfrac{1}{1-a^2})_{\min}=2\sqrt{2}+3$.

答案：$2\sqrt{2}+3$

强化训练

1.（2023 • 福建模拟 • ★）函数 $y=x+\dfrac{1}{x+1}$ 在 $[0,+\infty)$ 上的最小值是（　　）

（A）-2　　（B）1　　（C）2　　（D）3

2.（2023 • 全国模拟 • ★）已知 $0<x<1$，则 $x(4-3x)$ 的最大值为_____.

3.（★★）已知 x，y 均为正数，且 $2^{x-6}=(\dfrac{1}{4})^y$，则 xy 的最大值为（　　）

（A）$\dfrac{9}{2}$　　（B）$\dfrac{9}{8}$　　（C）$\dfrac{3}{2}$　　（D）$\dfrac{9}{4}$

4.（2023 • 天津南开一模 • ★★）已知实数 $a>0$，$b>0$，$a+b=1$，则 2^a+2^b 的最小值为_____.

5.（2022•江西九江模拟•★）已知$a>0$，$b>0$，$a+b=2$，则$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}$的最小值为_____.

6.（2023•全国模拟•★★★）已知$m>n>0$，且$m+n=1$，则$\frac{6}{m-n}+\frac{1}{3n}$的最小值为_____.

7.（2023•湖南株洲模拟•★★★）已知$0<x<1$，若关于x的不等式$\frac{4}{x}+\frac{1}{1-x}<m^2-8m$有解，则实数$m$的取值范围是（　　）

（A）$(-\infty,-9)\cup(1,+\infty)$　（B）$(-1,9)$　（C）$(-\infty,-1)\cup(9,+\infty)$　（D）$(-\infty,-1]\cup[9,+\infty)$

8.（2023•天津模拟•★★★）若$b>a>1$，且$3\log_a b+2\log_b a=7$，则$a^2+\frac{3}{b-1}$的最小值为_____.

9.（2022•广东湛江二模•★★★）若$a,b\in(0,+\infty)$，且$\sqrt{a}+\frac{4}{b}=9$，则$b+\frac{\sqrt{a}}{a}$的最小值为_____.